FH AACHEN
UNIVERSITY OF APPLIED SCIENCES

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden, Polynomen, gebrochenrationale Funktionen, Trigonometrische Funktionen, Exponentialfunktion und Logarithmus

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Zwei Darstellungsformen…

Analysis: $y = m \cdot x + b$

Vektorrechnung: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

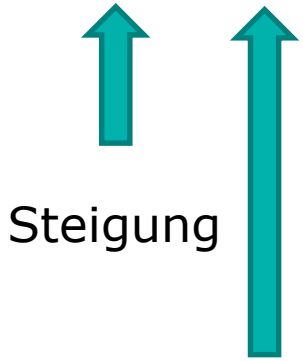
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Analysis

Was bedeutet die Gleichung?

$$y = m \cdot x + b$$



Y-Achsenabschnitt

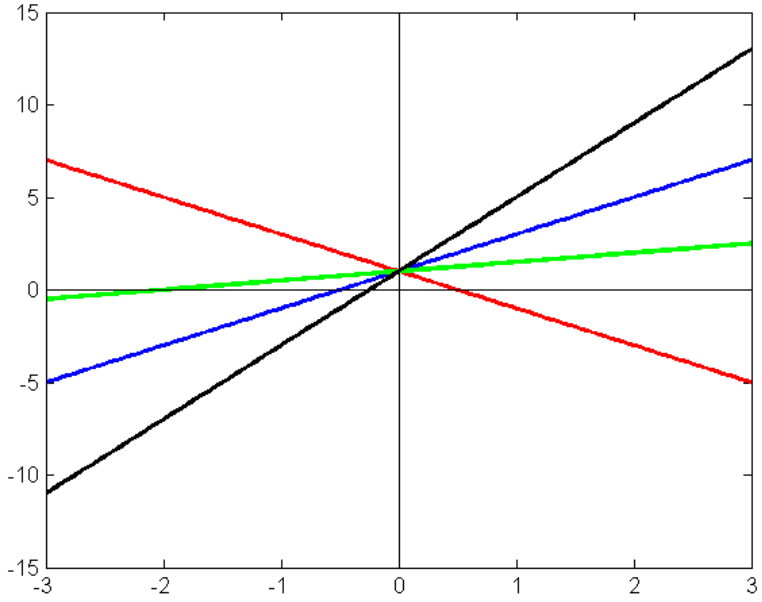
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Analysis

Was bedeutet die Gleichung? $y = m \cdot x + b$

$y = 2x + 1$ (blau)
$y = -2x + 1$ (rot)
$y = \frac{1}{2}x + 1$ (grün)
$y = 4x + 1$ (schwarz)



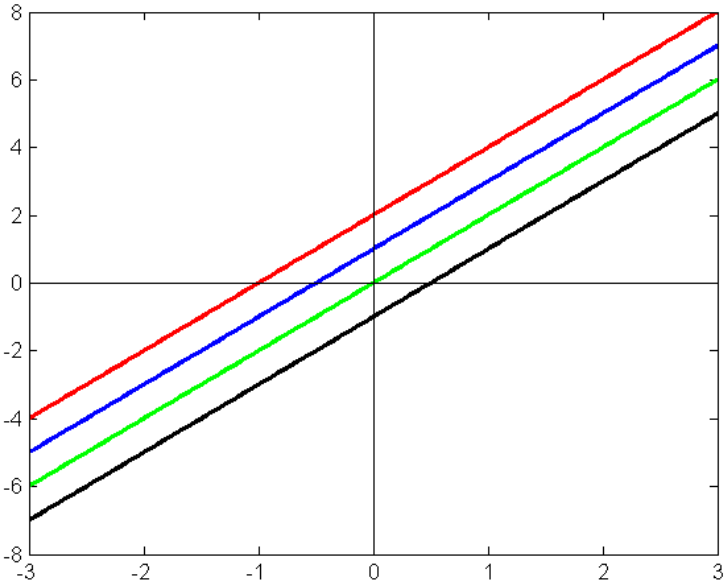
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Analysis

Was bedeutet die Gleichung? $y = m \cdot x + b$

$y = 2x + 1$	(blau)
$y = 2x + 2$	(rot)
$y = 2x$	(grün)
$y = 2x - 1$	(schwarz)



Mathematische Objekte: Funktionstypen

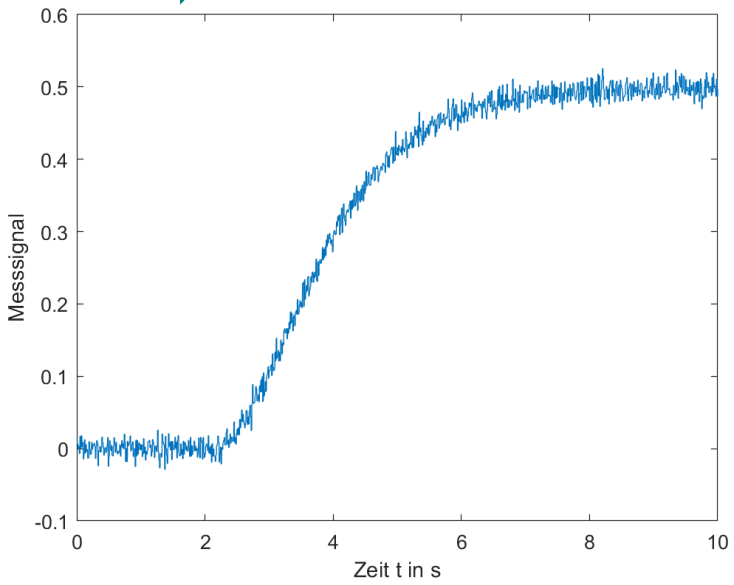
Geraden

Analysis

Wie kann ich aus einer Skizze die Geradengleichung bestimmen?

Nur die gezeichnete Gerade ist bekannt: Steigungsdreieck

Zwei Punkte der Geraden sind bekannt



Gerade Kennlinie: Steigung wird im Arbeitspunkt linearisiert

Gerade Regelstrecke: Sprungantwort wird im Wendepunkt linearisiert und ausgewertet: Wendetangente

Mathematische Objekte: Funktionstypen

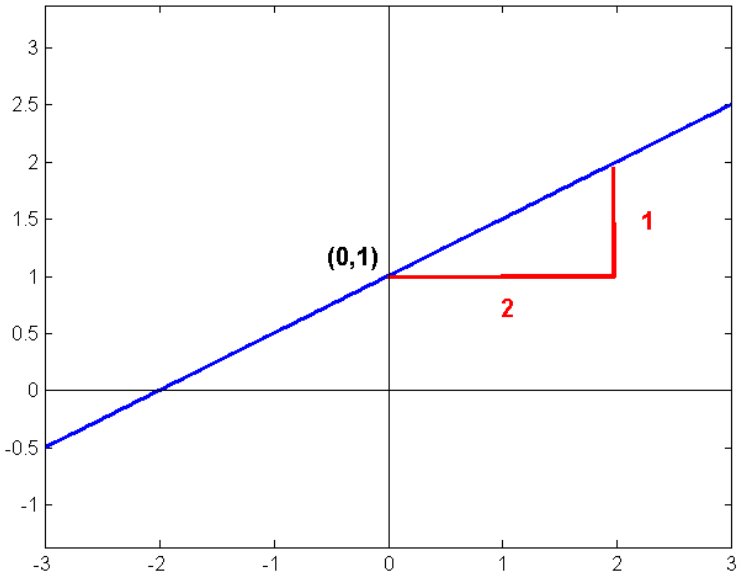
Geraden

Analysis

Wir nutzen das Steigungsdreieck…

Das Steigungsdreieck liefert die Steigung m der Geraden:

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$



Den y-Achsenabschnitt können wir direkt aus der Skizze ablesen…

Es ist der y-Wert, bei dem die Gerade die y-Achse schneitet → $b = 1$

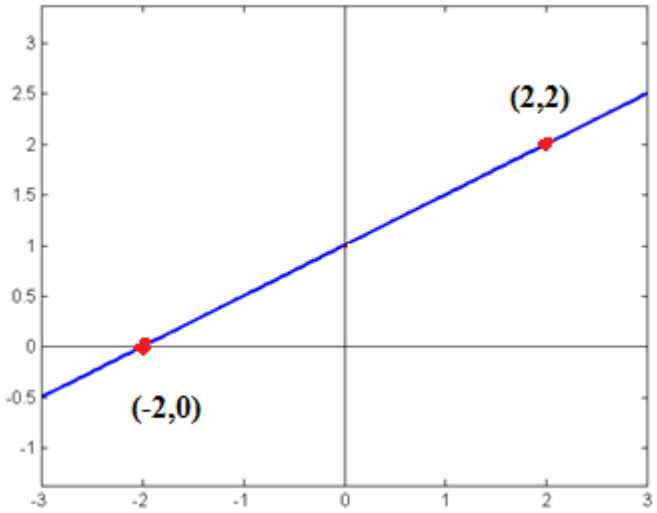
→ $$y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Analysis

Wir kennen zwei Punkte…



$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 2}{-2 - 2} = \frac{1}{2}$$

Den y-Achsenabschnitt könnten wir wieder ablesen, oder wir rechnen, indem wir einen Punkt verwenden…

$$(2,2) \in g \quad \Rightarrow \quad 2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + b \quad \Rightarrow \quad b = 1$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{1}{2} \cdot x + 1$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Vektorrechnung

Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$

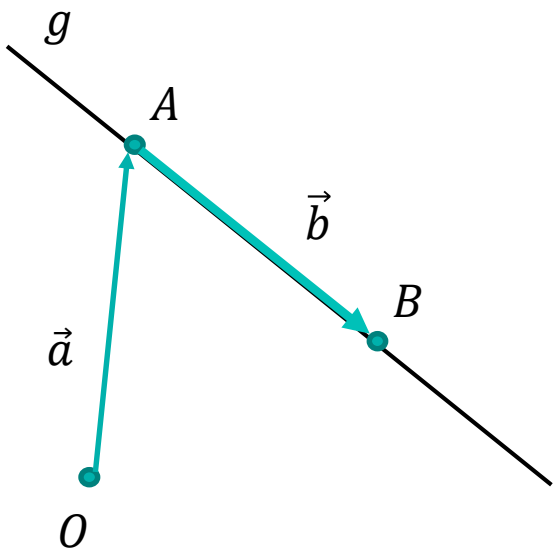


Mathematische Objekte: Funktionstypen

Geraden

Vektorrechnung

Parameterform: $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$



Beispiel: $A = (1,2,3)$

$B = (1,1,1)$

Stützvektor: $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Was sind Polynome?

Dazu ein paar Beispiele…

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$h(x) = 3x + 2$$

Allgemeine Definition:

Ein Polynom ist eine Funktion, bei der Vielfache von Potenzen der Unbekannten addiert werden.

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0 x^0$$

höchste Potenz = Grad des Polynoms

Monome

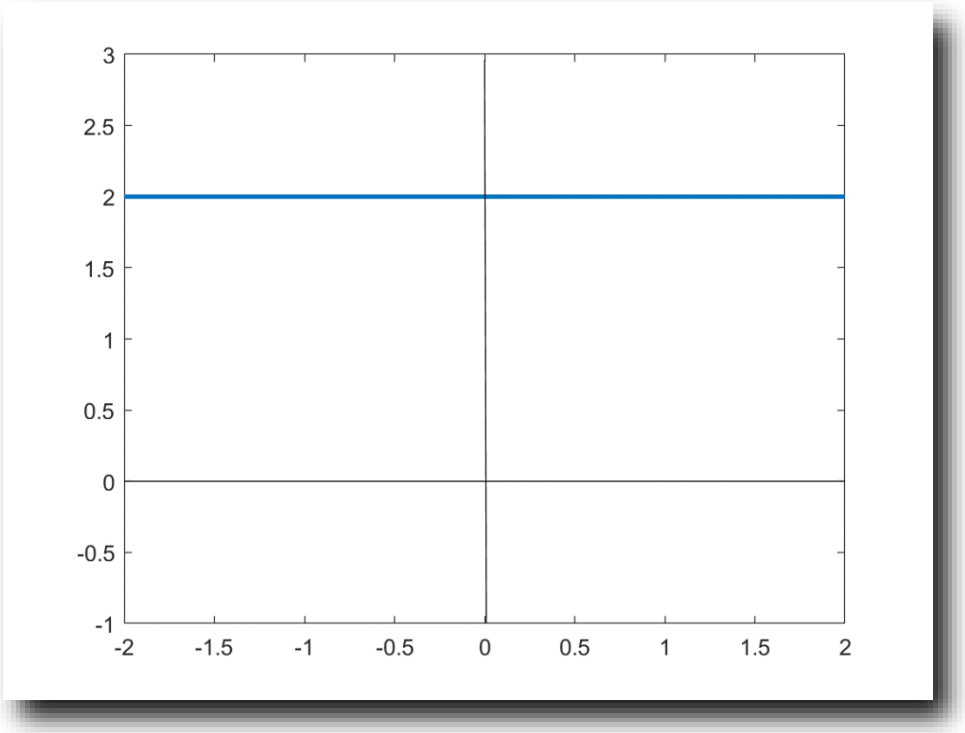
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Beispiele:

Wir schauen uns typische Beispiele und Eigenschaften an…

Grad 0: $f(x) = c \cdot x^0 = c$ → Eine Konstante…



Mathematische Objekte: Funktionstypen

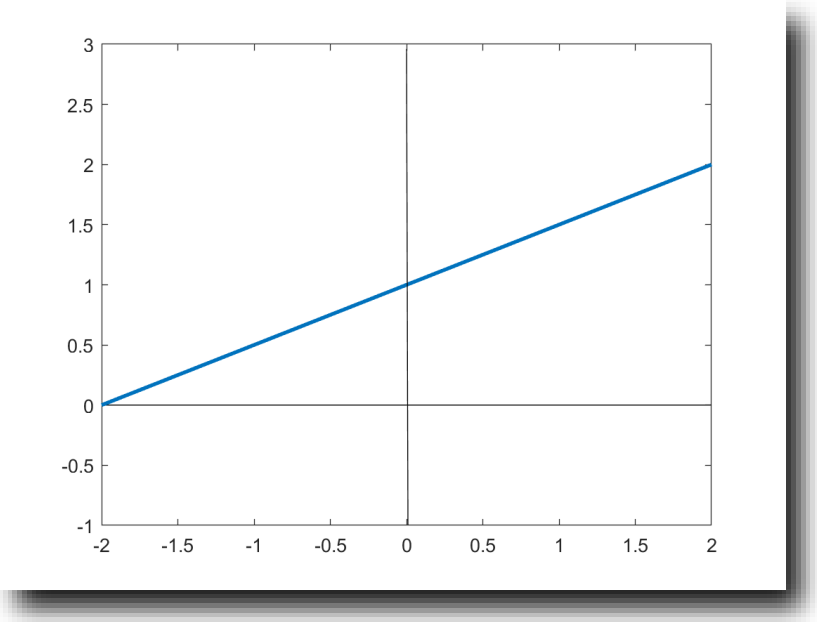
Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Beispiele:

Wir schauen uns typische Beispiele und Eigenschaften an…

Grad 0: $f(x) = c \cdot x^0 = c$ → Eine Konstante…

Grad 1: $f(x) = m \cdot x + b$ → Eine Gerade…

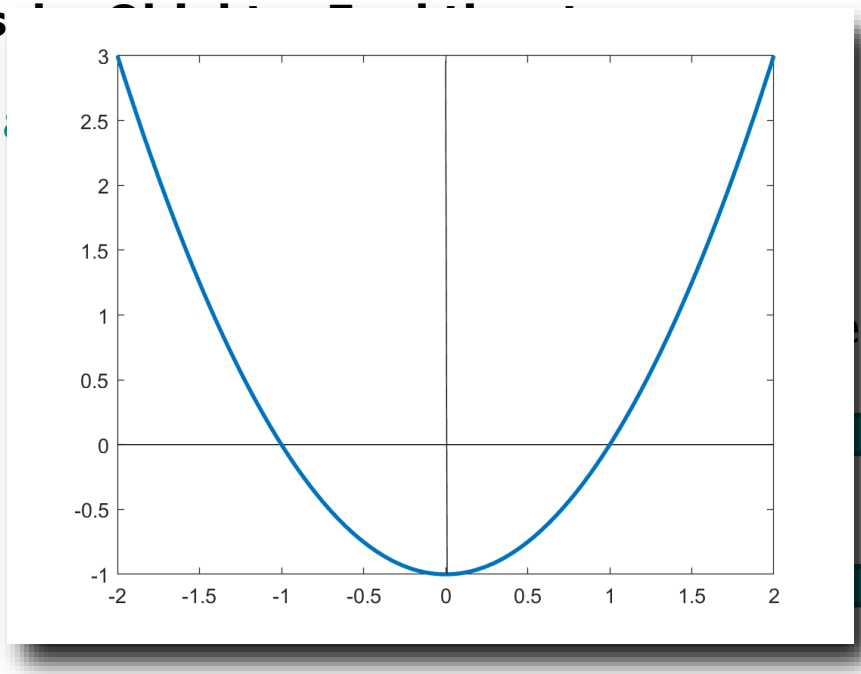


Mathematis

Polynome (G

Beispiele:

Wir schauen n an…



Grad 0: → Eine Konstante…

Grad 1: → Eine Gerade…

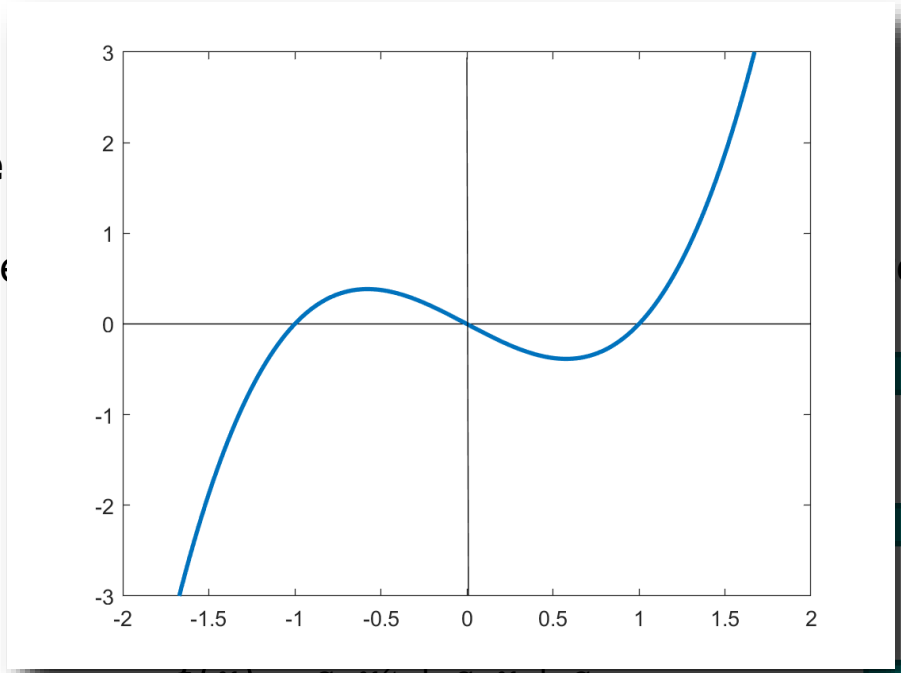
Grad 2: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ → Eine Parabel…

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome

Beispiele

Wir schaue[illegible]en an…



Grad 0: → Eine Konstante…

Grad 1: → Eine Gerade…

Grad 2: $f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$ → Eine Parabel…

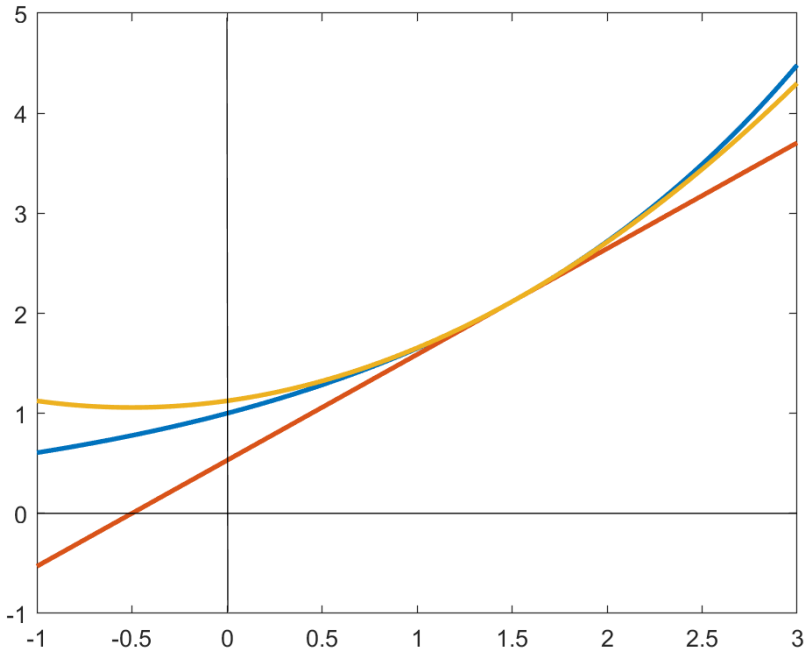
Grad 3: $f(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ → Eine kubische Funktion…

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Wo verwendet ich Polynome?

Approximation von Kennlinien im Arbeitspunkt…



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Wo verwendet ich Polynome?

Generell werde Naturgesetzt durch Polynome beschrieben…

Gleichmäßig beschleunigte Bewegung: $$s(t) = \frac{1}{2} a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + s_0$$

Kinetische Energie: $$E_{kin} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

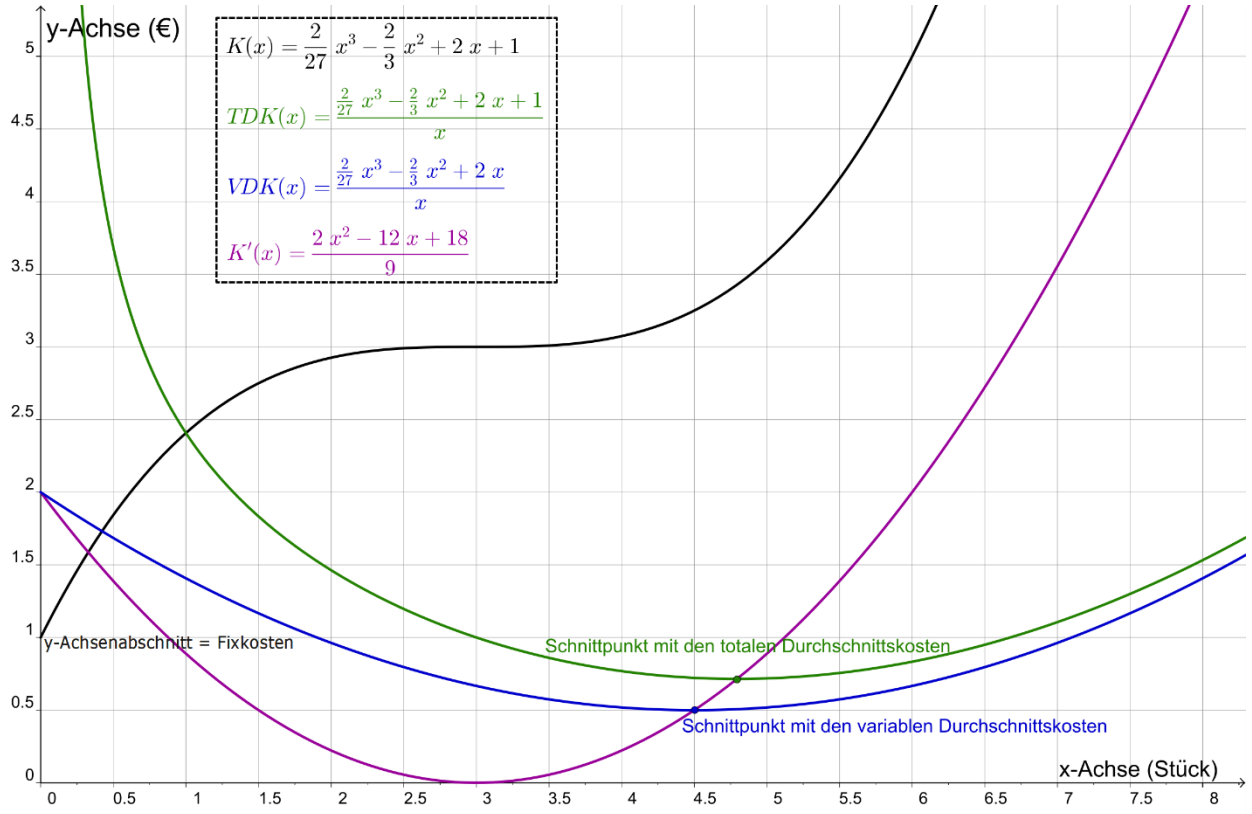
Stefan-Boltzmann-Gesetz: $$P = \sigma \cdot A \cdot T^4$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Wo verwendet ich Polynome?

Kostenfunktionen in der Wirtschaft können durch Polynome beschrieben werden…



Quelle: Wikipedia

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Wie berechne ich Schnittpunkte von Polynomen?

Wir setzen die Terme der beiden Polynome gleich und erhalten eine Nullstellenaufgabe…

$$f(x) = x^2 + 2x - 1$$

$$g(x) = 2x^2 + x + 2$$

$$f(x) = g(x) \quad \Rightarrow \quad x^2 + 2x - 1 = 2x^2 + x + 2$$

$$x^2 - x + 3 = 0$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

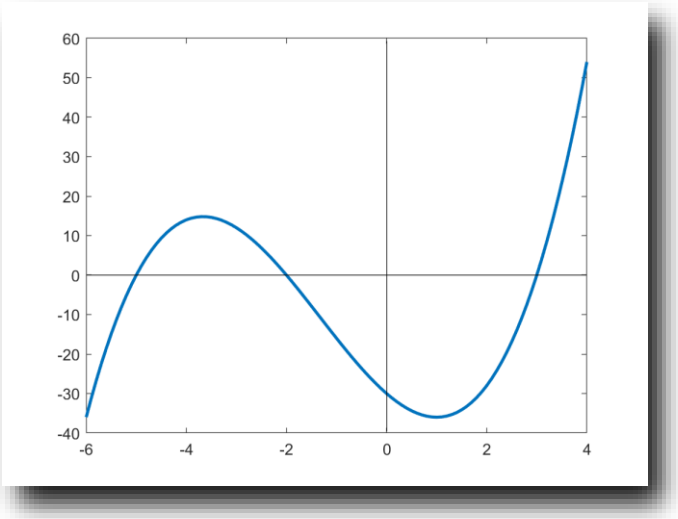
Wie berechne ich die Nullstellen von Polynomen mit höherem Grad?

Wir erraten sinnvoll eine Nullstelle…

$$x^3 + 4x^2 - 11x - 30 = 0$$



Nur Teiler der Konstanten kommen in Frage!



Hier also:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Polynome (Ganzrationale Funktionen)

Wie berechne ich die Nullstellen von Polynomen mit höherem Grad?

Wir erraten sinnvoll eine Nullstelle…

Wir erraten: $x = 3$

Wir führen eine Polynomdivision aus und spalten den zugehörigen Linearfaktor $(x - 3)$ vom Ausgangspolynom ab…



$$\left(x^3 + 4x^2 - 11x - 30\right) : (x - 3) = x^2 + 7x + 10$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen

Was sind gebrochenrationale Funktionen?

Wir kennen bereits ganzrationale Funktionen (Polynome)…

Gebrochenrationale Funktionen erhalten wir indem wir einen Bruch aus zwei ganzrationalen Funktionen bilden…

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-2x+1}$$

$$h(x) = \frac{x^4+1}{x^4-1}$$

$$g(x) = \frac{x^3+1}{x^2-1}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen

Besonderheiten bei gebrochenrationalen Funktionen

Der Definitionsbereich ist in der Regel eingeschränkt…

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 1}$$

Der Nenner darf nicht null werden!

Wir müssen folgende Gleichung lösen:

$$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)(x + 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen

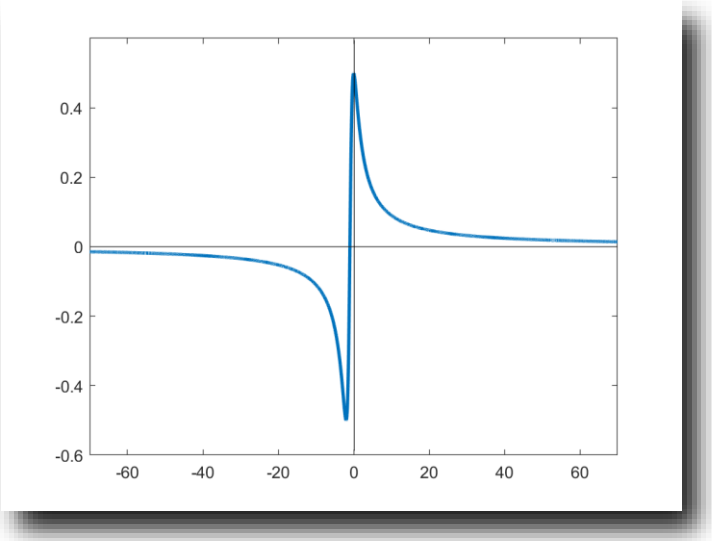
Besonderheiten bei gebrochenrationalen Funktionen

Häufig interessiert uns das Verhalten im Unendlichen…

Wir unterscheiden drei Fälle:

- Nennergrad > Zählergrad $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$

⇒ Funktion geht gegen 0



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen

Besonderheiten bei gebrochenrationalen Funktionen

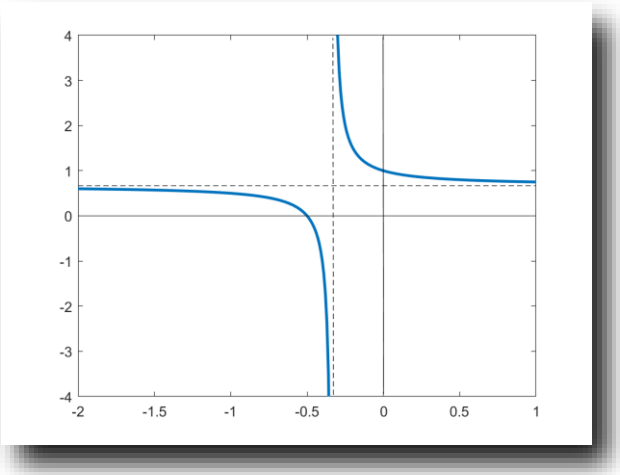
Häufig interessiert uns das Verhalten im Unendlichen…

Wir unterscheiden drei Fälle:

- Nennergrad > Zählergrad $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$

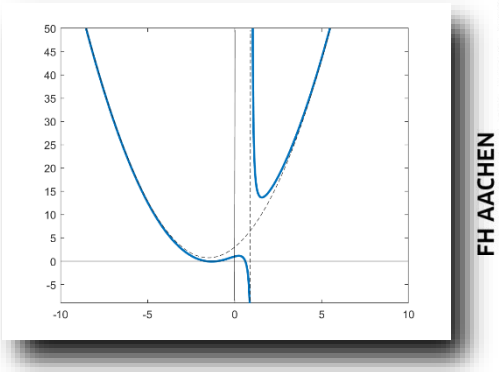
- Nennergrad = Zählergrad $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$

→ Funktion geht gegen Vorfaktoren der höchsten Potenzen



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen



Besonderheiten bei gebrochenrationalen Funktionen

Häufig interessiert uns das Verhalten im Unendlichen…

Wir unterscheiden drei Fälle:

- Nennergrad > Zählergrad $f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+2}$

- Nennergrad = Zählergrad $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$

- Nennergrand < Zählergrad $f(x) = \frac{x^3+2x^2-1}{x-1}$

$= x^2 + 3x + 3 + \frac{2}{x-1}$

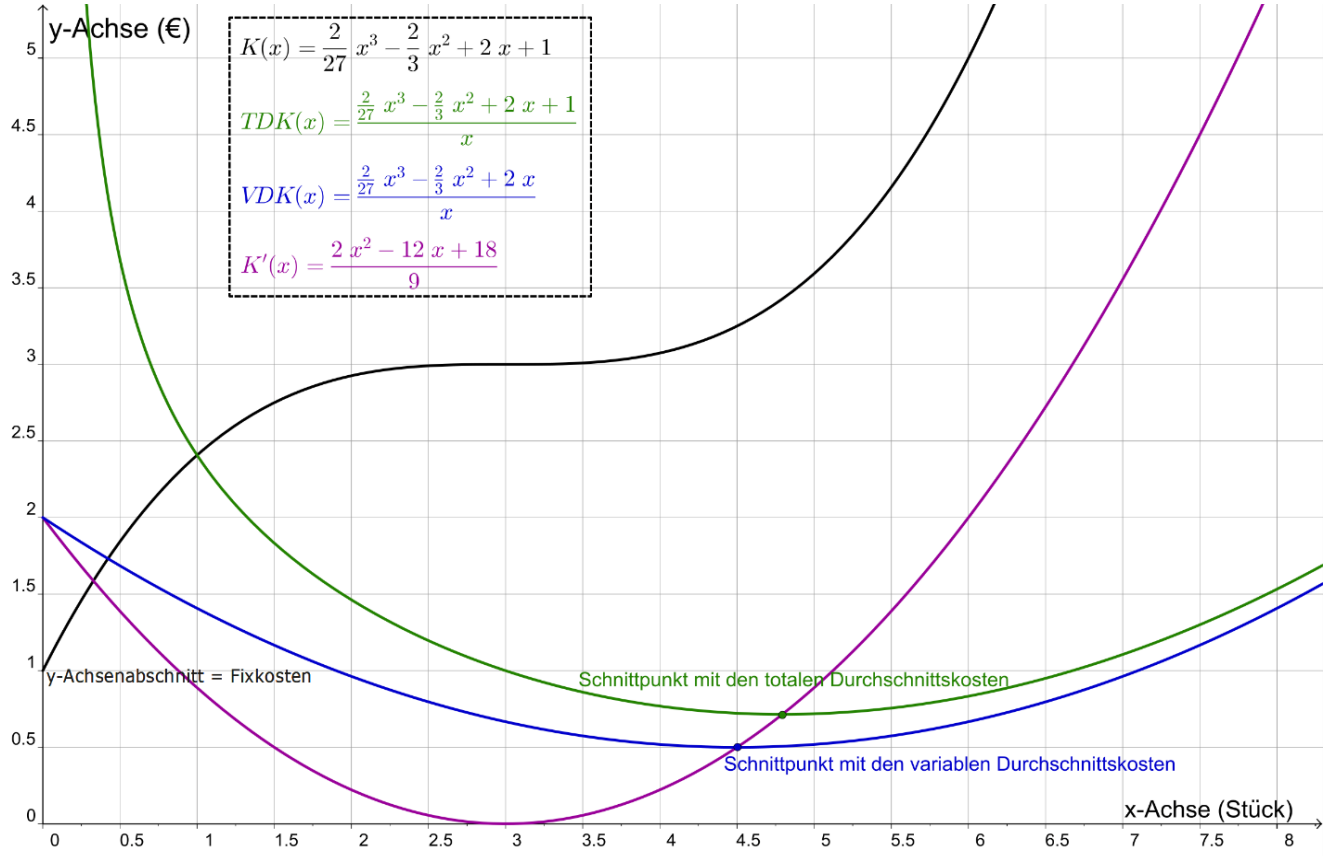
→ Polynomdivision

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen

Wo werden gebrochenrationale Funktionen angewendet?

Bei der Analyse von Kostenfunktionen in der Wirtschaft…



Quelle: Wikipedia

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Gebrochenrationale Funktionen

Wo werden gebrochenrationale Funktionen angewendet?

In der Regelungstechnik werden System durch sogenannte Übertragungsfunktionen im Laplacebereich beschrieben…

PT1-Glied: $$G(s) = \frac{K}{1+T \cdot s}$$

PT2-Glied: $$G(s) = \frac{K}{T^2 \cdot s^2 + 2 \cdot D \cdot T \cdot s + 1}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Was sind trigonometrische Funktionen?

Als trigonometrische Funktionen werden die Winkelfunktionen am Dreieck bezeichnet.

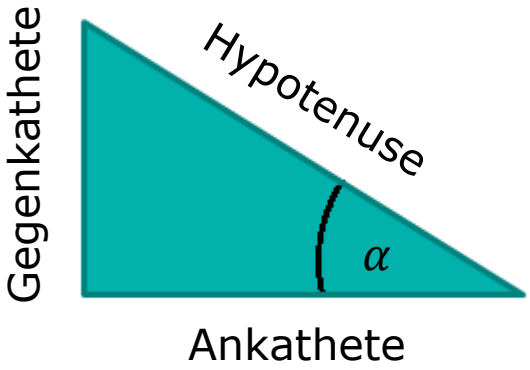
Dazu gehören: sin, cos, tan, ~~sec, cot, csc~~

Üblicherweise werden die Funktionen am rechtwinkligen Dreieck definiert:

$$\sin\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$



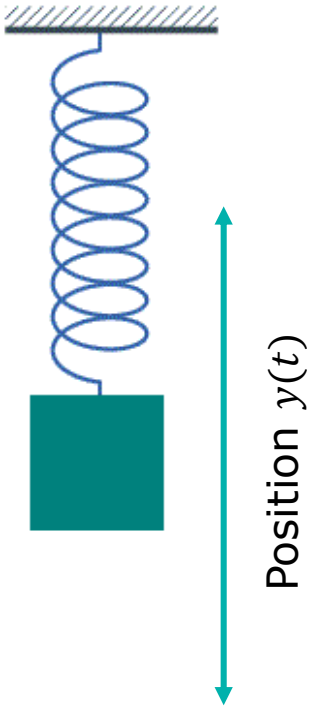
Mathematische Objekte: Funktionstypen

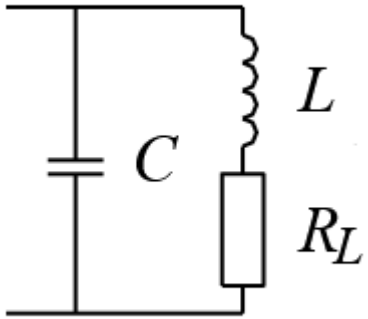
Trigonometrische Funktionen

Was sind trigonometrische Funktionen?

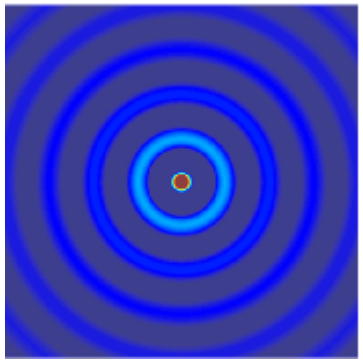
Oft ist es in der Anwendung nützlich, die Winkelfunktionen als Funktionen von Zeit und/oder Ort, unabhängig vom Dreieck zu betrachten.

Beispiel: Schwingungen und Wellen





Schwingkreis aus
Kondensator und Spule



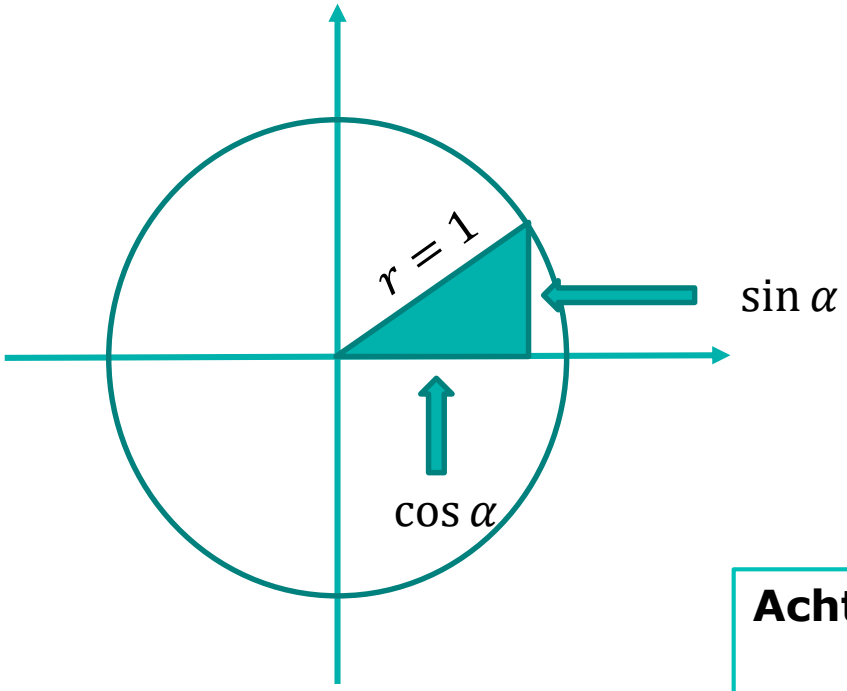
Wasserwellen

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Wie definiere ich trigonometrische Funktionen?

Wir betrachten den Einheitskreis…



Achtung:

Winkel werden im Bogenmaß gezählt

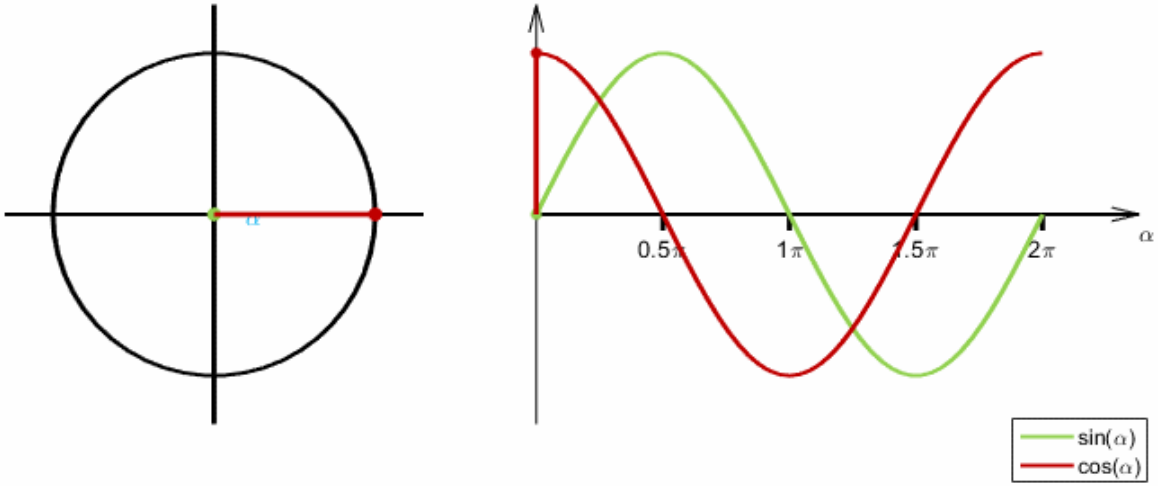
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Wie definiere ich trigonometrische Funktionen?

Wir betrachten den Einheitskreis…

Wir betrachten den Winkel α als Variable und zeichnen die x- und y- Koordinaten auf…



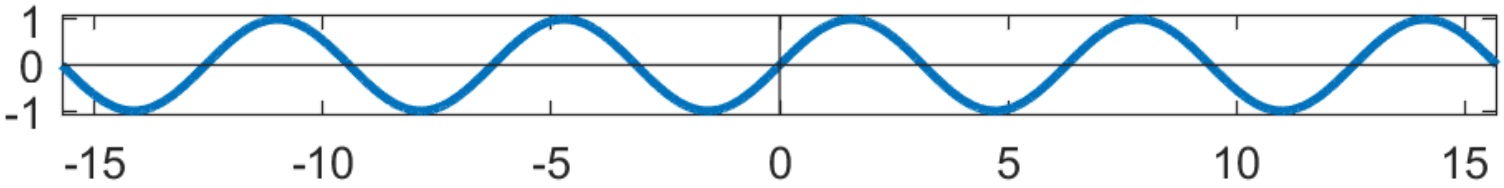
Quelle: Wikipedia

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Kosinus als Funktionen

Die Sinus-Funktion…



Eigenschaften:

- 2π −periodisch
- $D = \mathbb{R}$
- $W = [-1,1]$
- man kann den Sinus durchzeichnen (stetig)
- Punktsymmetrisch zum Ursprung

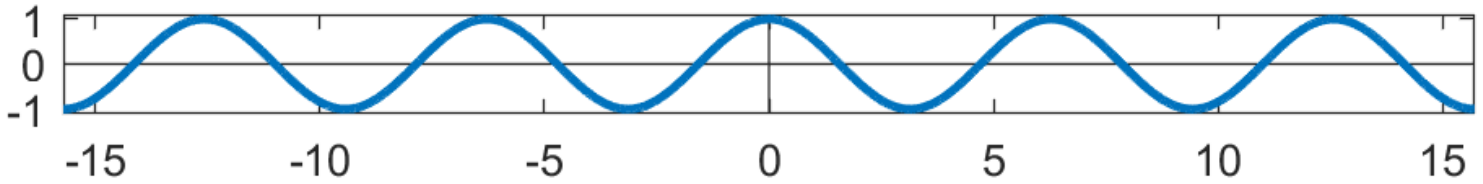
$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Kosinus als Funktionen

Die Kosinus-Funktion…



Eigenschaften:

- 2π −periodisch
- $D = \mathbb{R}$
- $W = [-1,1]$
- man kann den Kosinus durchzeichnen (stetig)
- Achsensymmetrisch zur y-Achse

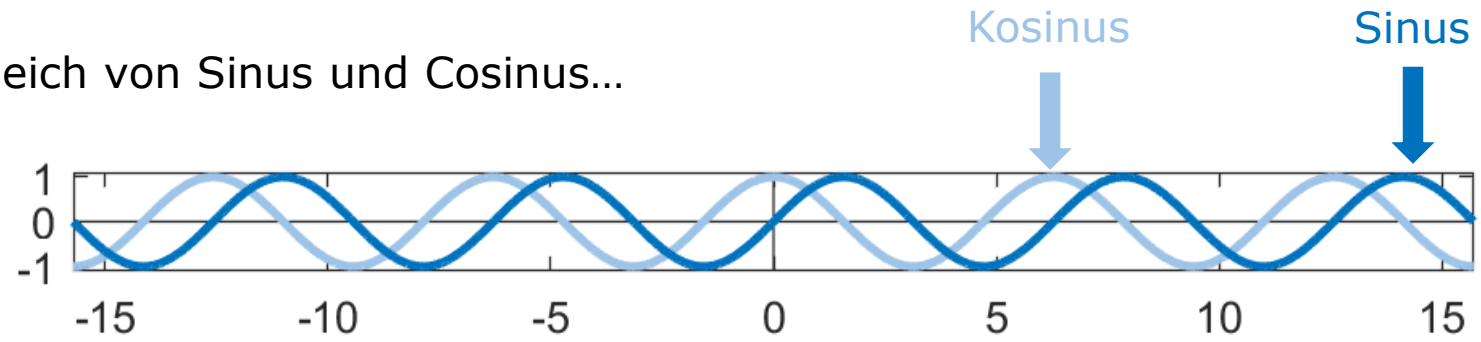
$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Sinus und Kosinus als Funktionen

Vergleich von Sinus und Cosinus…



Eigenschaften:

- Sinus und Kosinus sind um $\pi/2$ verschoben
- Trigonometrische Pythagoras
- Es existieren Zahlreiche Additionstheoreme

$$\cos(\alpha) = \sin(\pi/2 - \alpha)$$
$$\sin(\alpha) = \cos(\pi/2 - \alpha)$$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta \pm \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

https://de.wikipedia.org/wiki/Formelsammlung_Trigonometrie#Additionstheoreme

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

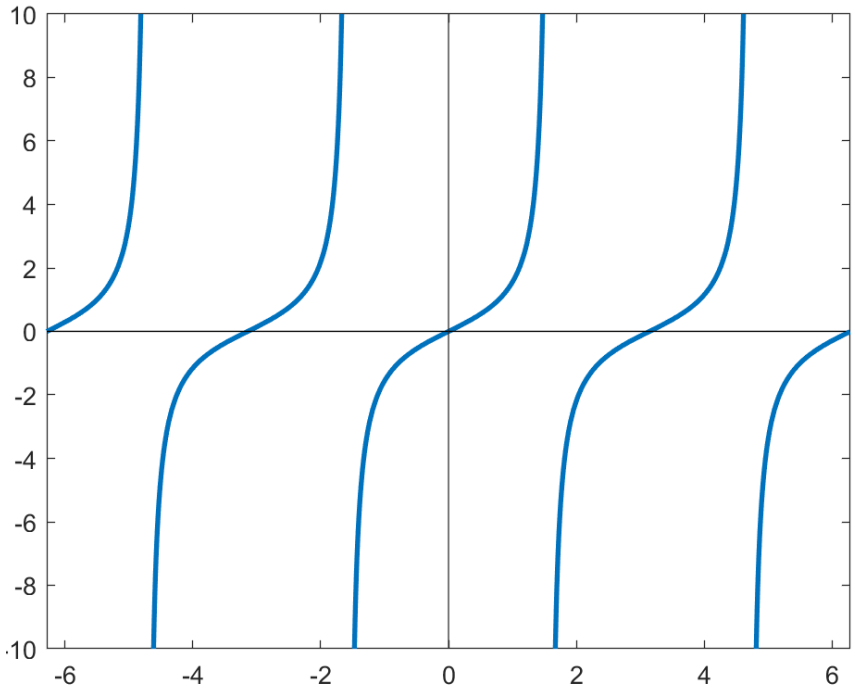
Der Tangens als Funktion

Auch der Tangens kann am Einheitskreis definiert werden…

Die Tangens-Funktion…

Eigenschaften:

- Polstellen bei Nullstellen des cos
- $W = \mathbb{R}$
- π −periodisch
- Punktsymmetrisch zum Ursprung



$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$$

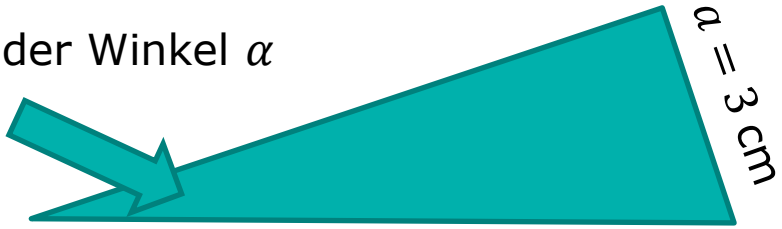
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

Was sind Umkehrfunktionen?

Beispielaufgabe…

Gesucht ist der Winkel α



$c = 5$ cm

Wir nutzen den Sinus am rechtwinkligen Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \frac{3}{5}$$

Um jetzt den Winkel zu erhalten, müssen wir die Gleichung nach α umstellen…

$$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin\frac{3}{5} \approx 36.8°$$

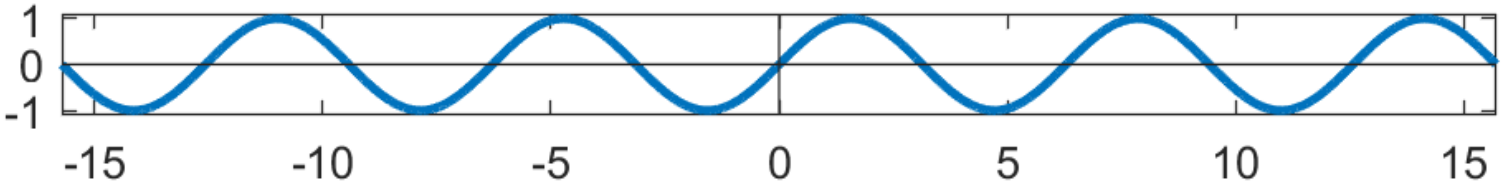
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

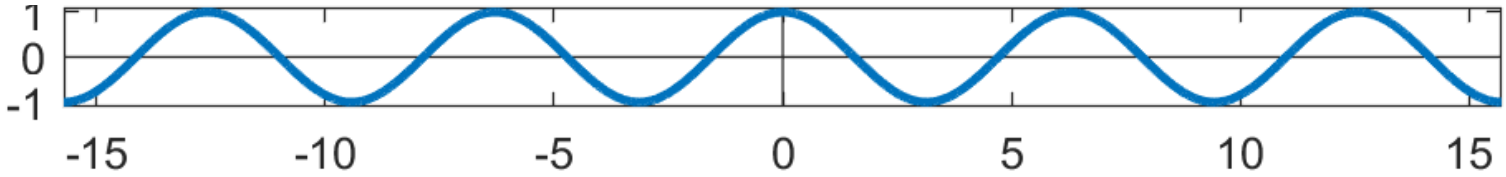
Umkehrfunktionen

Wir suchen die Umkehrfunktionen (Taschenrechner: $\sin^{-1}$)...

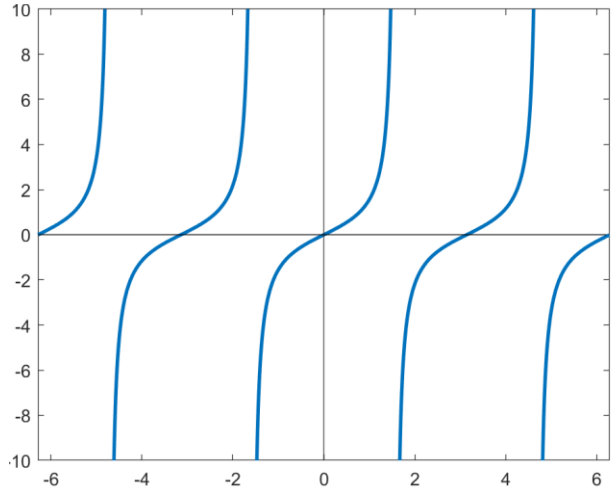
$\sin\alpha$



$\cos\alpha$



$\tan\alpha$



Wir schränken den Definitionsbereich ein:

$\tan\alpha$: $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ ➡ arctan

$\sin\alpha$: $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ➡ arcsin

$\cos\alpha$: $\alpha \in [0, \pi]$ ➡ arccos

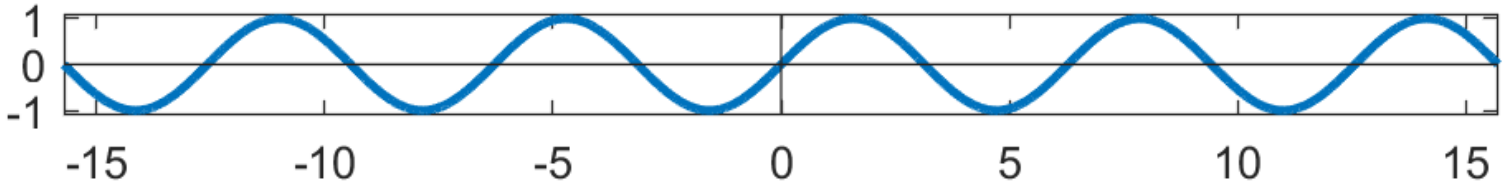
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

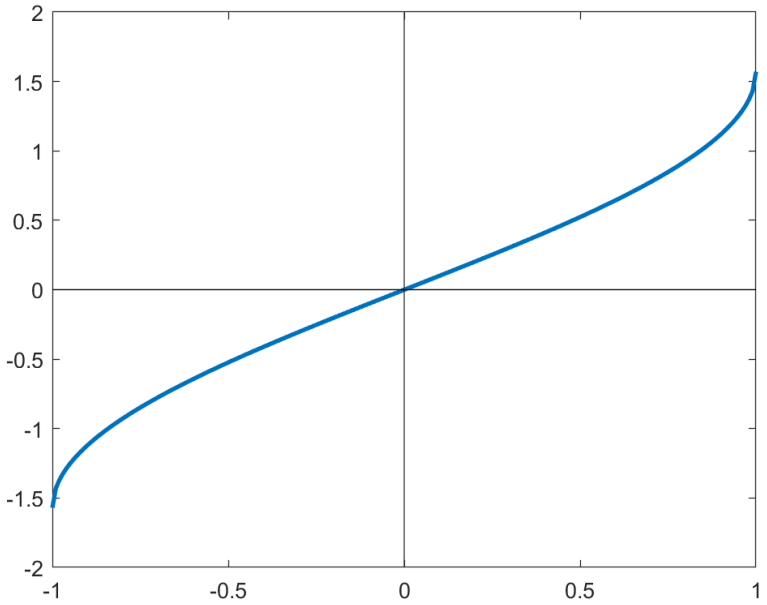
Umkehrfunktionen vom Sinus

Hier der Arkussinus…

$\sin \alpha$



$\arcsin \alpha$



Eigenschaften:

- $D = [-1,1]$
- $\mathrm{W} = [-\pi/2, \pi/2]$
- $\arcsin(\sin \alpha) = \alpha$

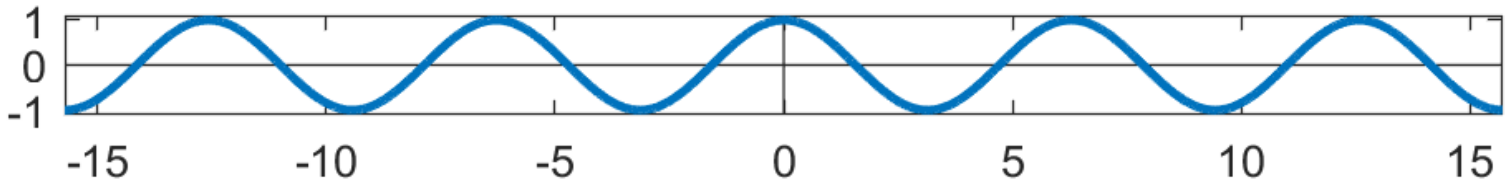
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

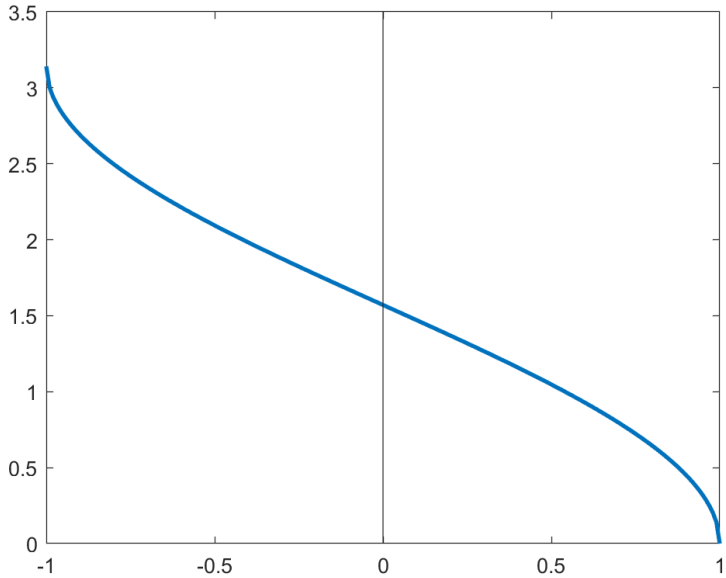
Umkehrfunktionen vom Kosinus

Hier der Arkuskosinus…

$\cos \alpha$



$\arccos \alpha$



Eigenschaften:

- $D = [-1,1]$
- $\mathrm{W} = [0, \pi]$
- $\arccos(\cos \alpha) = \alpha$

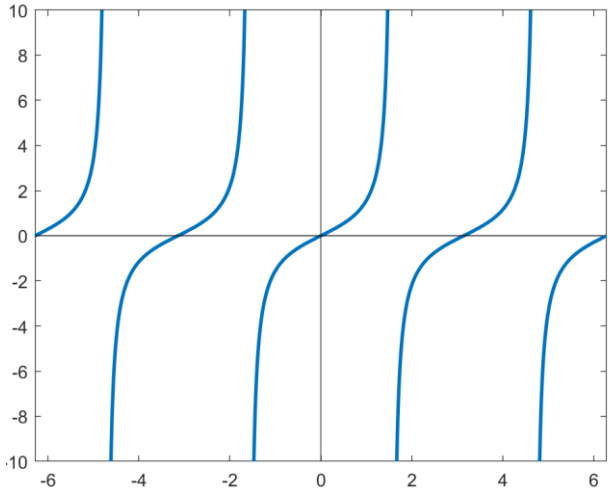
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Trigonometrische Funktionen

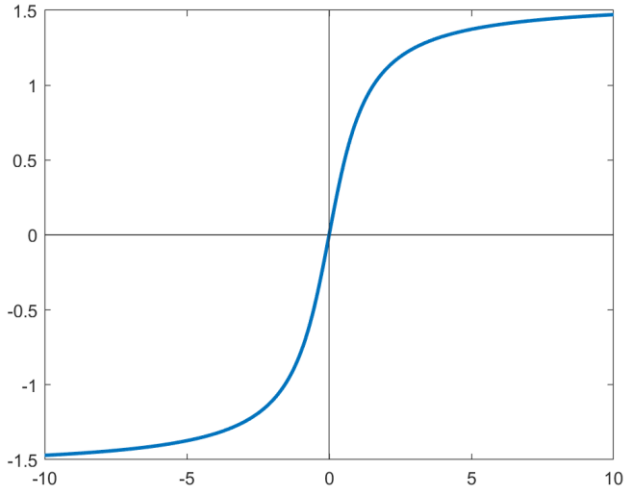
Umkehrfunktionen vom Tangens

Hier der Arkustangens…

$\tan \alpha$



$\arctan \alpha$



Eigenschaften:

- $D = \mathbb{R}$
- $W = [-\pi/2, \pi/2]$
- $\arctan(\tan \alpha) = \alpha$

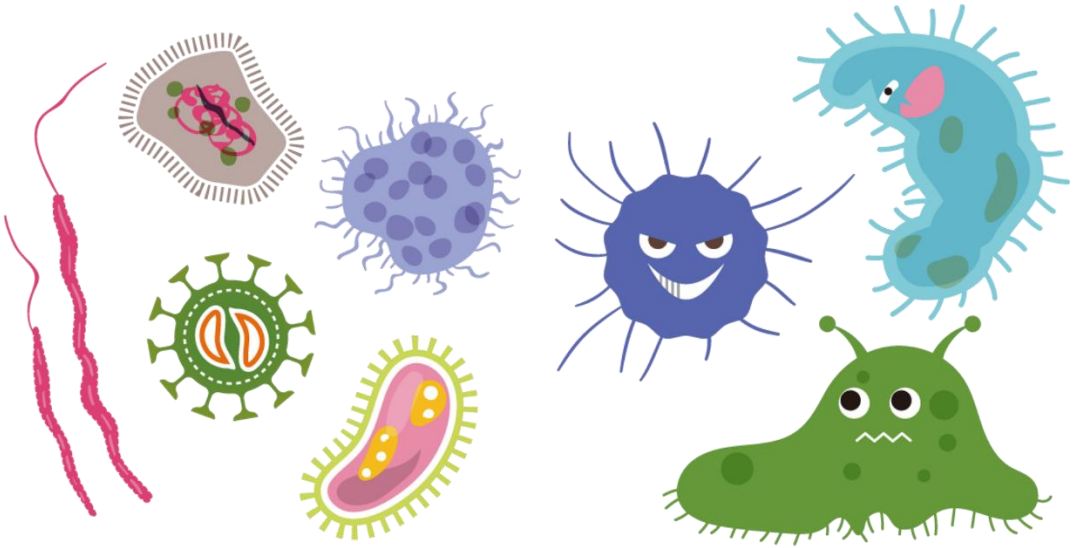
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Wozu die Exponentialfunktion?

Die Exponentialfunktion hat sehr viele praktische Anwendungen…

Der Klassiker…



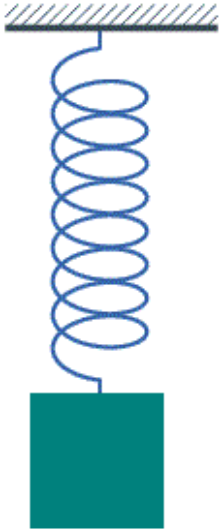
Das Wachstum von Bakterien verläuft zumindest teilweise exponentiell…

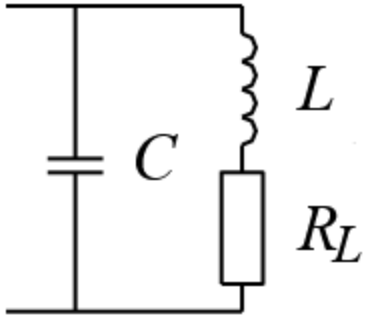
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

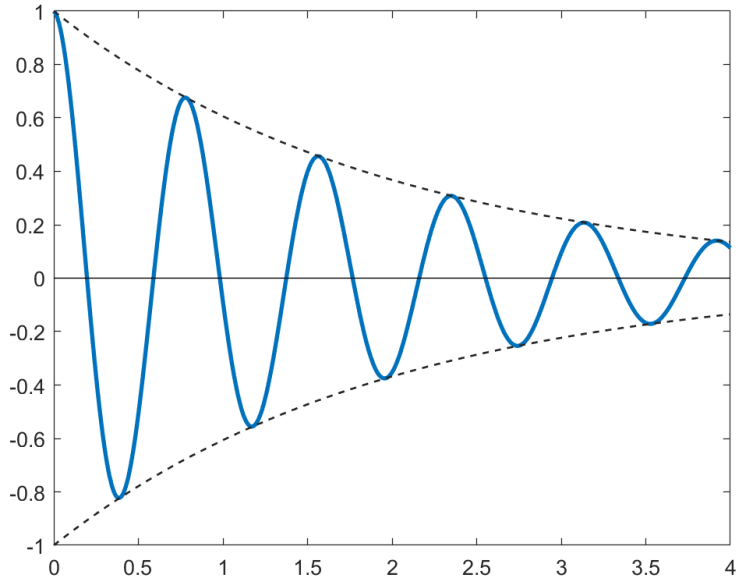
Wozu die Exponentialfunktion?

Wir betrachten gedämpfte Schwingungen…





Schwingkreis aus
Kondensator und Spule



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Wozu die Exponentialfunktion?

Auch in der Wirtschaft treten exponentielle Vorgänge auf…

Zinseszins…

$$K = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

Was hat das mit der e-Funktion zu tun?

$$K(x) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$$

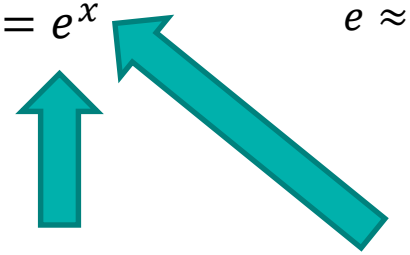
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Schauen wir und sie „klassische" e-Funktion an...

$f(x) = e^x$

$e \approx 2.718 \ldots$ ist die Euler'sche Zahl



x ist der Exponent

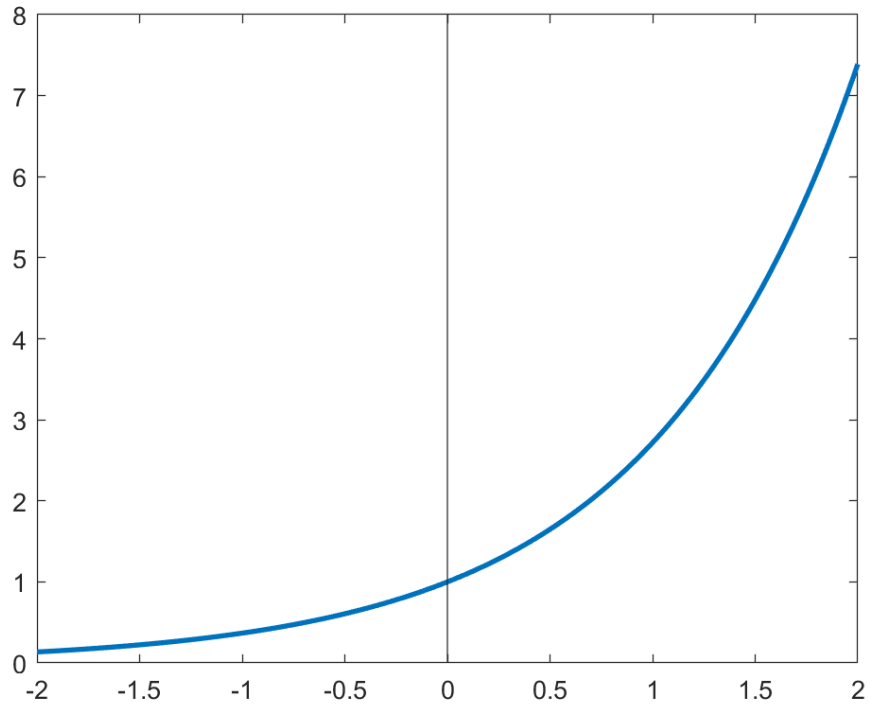
e ist die Basis

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Schauen wir und sie „klassische" e-Funktion an...

$$f(x) = e^x$$



Eigenschaften:

- immer positiv, $W = \mathbb{R}_+$
- für $x \to -\infty$ geht sie gegen 0
- für $x \to \infty$ steigt die Funktion
- $f(0) = 1$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Schauen wir und sie „klassische" e-Funktion an…

Es gelten die üblichen Potenzregeln…

$$e^x \cdot e^y = e^{x+y}$$

$$(e^x)^y = e^{x \cdot y}$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

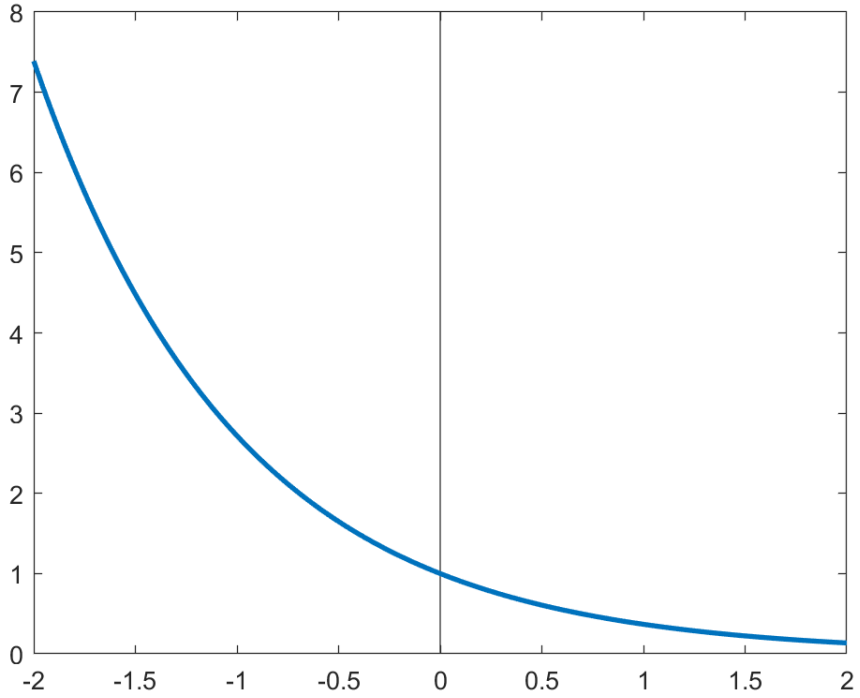
Exponentialfunktion und Logarithmus

Schauen wir und sie „klassische" e-Funktion an...

Wir betrachten... $f(x) = e^{-x}$

Eigenschaften:

- immer positiv, $W = \mathbb{R}_+$
- für $x \to \infty$ geht sie gegen 0
- für $x \to -\infty$ steigt die Funktion
- $f(0) = 1$



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Umkehrfunktion: der Logarithmus

Wie löse ich die folgende Gleichung? $e^x = 2$

Betrachten wir die Situation beim Sinus… $\sin\alpha = 0.2$



$$\arcsin(\sin\alpha) = \arcsin 0.2 = \alpha$$

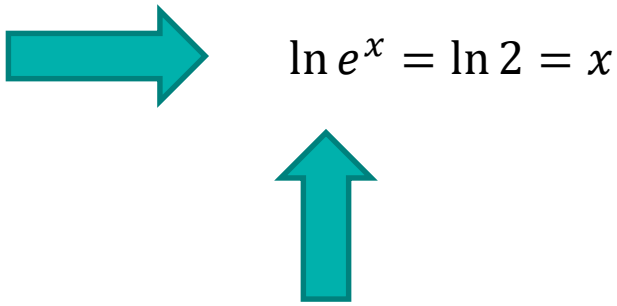
Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Umkehrfunktion: der Logarithmus

Wie löse ich die folgende Gleichung? $e^x = 2$

Wir wenden die Umkehrfunktion an… den Logarithmus:



$$\ln e^x = \ln 2 = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

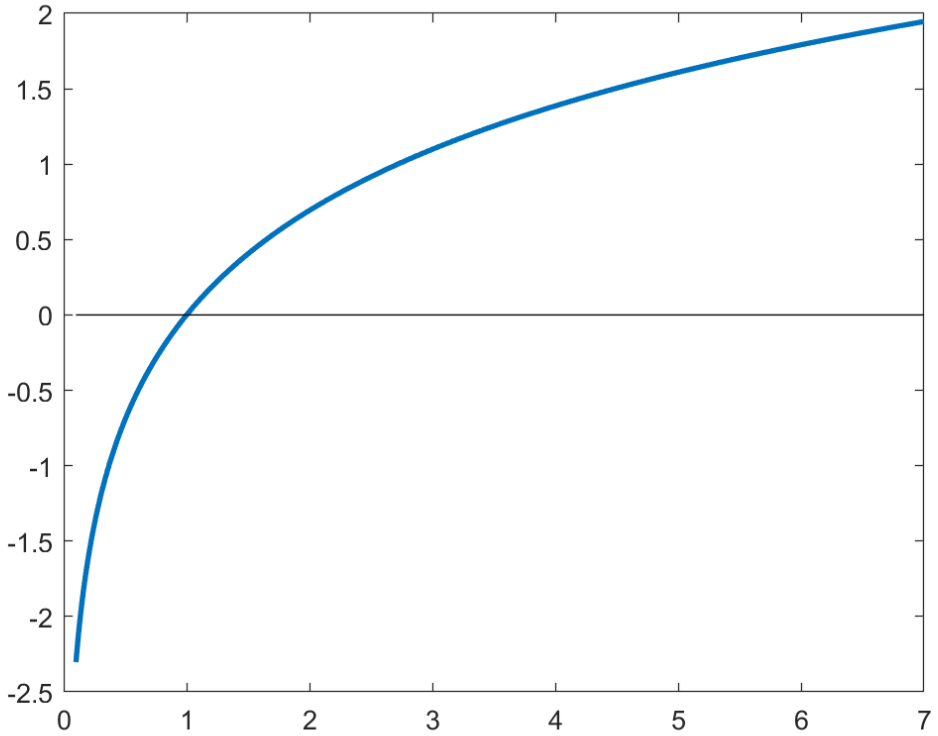
Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Umkehrfunktion: der Logarithmus

Wie sieht der Logarithmus aus?

Eigenschaften:

- D= $\mathbb{R}_+$
- für $x \to 0$ fällt die Funktion
- für $x \to \infty$ steigt die Funktion
- $f(1) = 0$



Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Umkehrfunktion: der Logarithmus

Auch für den Logarithmus gelten wichtige Regeln…

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

$$\ln x^y = y \ln x$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Anwendungsbeispiel: Exponentielles Zerfallsgesetz

Das Zerfallsgesetz in der Kernphysik gibt die Anzahl N der Atomkerne an, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind…

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Anzahl der Kerne zu Beginn $t = 0$

Zerfallskonstante

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Anwendungsbeispiel: Exponentielles Zerfallsgesetz

Das Zerfallsgesetz in der Kernphysik gibt die Anzahl N der Atomkerne an, die zum Zeitpunkt t noch nicht zerfallen sind…

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Häufig wird von der sogenannten Halbwertszeit gesprochen…

Die Halbwertszeit gibt an, wann die Hälfte aller zur Zeit $t = 0$ vorhandenen Atomkerne zerfallen ist.

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Anwendungsbeispiel: Exponentielles Zerfallsgesetz

Wir rechnen…

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

$$N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} = \frac{N_0}{2}$$

$$e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{-\lambda \cdot t_{1/2}} = \ln \frac{1}{2}$$

$$-\lambda \cdot t_{1/2} = \ln \frac{1}{2} = \ln 1 - \ln 2$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Jetzt sind Sie an der Reihe...

1. Lösen Sie die Abklingfunktion $y(t) = y_0 e^{-\lambda t}$ und die Sättigungsfunktion $y(t) = y_0(1 - e^{-\lambda t})$ nach λ auf.

2. Bestimmen Sie die Halbwertzeiten.

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Allgemeine Potenz und allgemeiner Logarithmus

Was machen wir, wenn die Basis nicht e ist?

$$K(x) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x$$

$$\Rightarrow \quad \ln K(x) = \ln\left(K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x\right)$$

$$\Rightarrow \quad \ln K(x) = \ln K_0 + x \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\ln K(x) - \ln K_0}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)} = \frac{\ln\left({}^{K(x)}/_{K_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

Exponentialfunktion und Logarithmus

Allgemeine Potenz und allgemeiner Logarithmus

Ich kann jede allgemeine Potenz als Potenz von e schreiben…

$$a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

Warum das???

$$e^{b \cdot \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$$

Mathematische Objekte: Funktionstypen

Exponentialfunktion und Logarithmus

Allgemeine Potenz und allgemeiner Logarithmus

Ich kann jede allgemeine Potenz als Potenz von e schreiben…

$$a^b = e^{b \cdot \ln a}$$

Warum das???

$$e^{b \cdot \ln a} = e^{\ln a^b} = a^b$$

Damit würde die Formel für den Zinseszins wie folgt aussehen…

$$K(x) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^x \quad \Rightarrow \quad K(x) = K_0 \cdot \exp\left(x \cdot \ln\left(1 + \frac{p}{100}\right)\right)$$